

# **PROBLEMAS DE HOMOGENEIZACION EN LA INGENIERIA. UNA EXPERIMENTACION NUMERICA**

MIGUEL LOBO  
MARIA EUGENIA PEREZ  
y  
AVELINO SAMARTIN

## **RESUMEN**

Se expone brevemente el problema matemático de homogeneización, en sus facetas: homogeneización en el dominio y en el contorno. Con respecto a esta última, se introducen los conceptos de talla crítica y problema límite. Los resultados obtenidos se aplican a un caso particular representado por un cilindro con condiciones de borde periódicas. Se comprueba la validez del desarrollo teórico mediante una experimentación numérica utilizando elementos finitos 3-D observándose la velocidad de convergencia que se obtiene en relación con el caso límite. Finalmente se comenta la posibilidad de utilizar la técnica de homogeneización para obtener unos criterios hacia un diseño eficiente y óptimo de los resultados de las barras corrugadas en el hormigón armado.

## **SUMMARY**

The two main problems of homogeneization —the homogeneization of the boundary and the homogeneization of the domain— are briefly presented. The concept of the critical size and the limit problem are introduced for the homogeneization of the boundary. The obtained results are applied to a particular example represented by a cylindrical body with periodical conditions over the lateral boundary. The validity of the theoretical analysis is checked by a numerical test using 3-D finite element model and the convergence speed towards the limit problem is observed. Finally some hints about the use of the obtained results in the design of the corrugation of the reinforcement bars of the concrete structures are given.

## INTRODUCCION

Una clase de estructuras que aparece frecuentemente en la Ingeniería corresponde a las constituidas por un elemento que se repite en una o varias direcciones. Consideraciones de eficiencia constructiva, y a veces de prefabricación, impulsan este tipo de construcciones. Ejemplos conocidos corresponden a forjados, denominados entrepisos sin vigas, que representan estructuras emparrillado plano con una celda que se repite según dos direcciones ortogonales (Figura 1). Otros casos son las celosías regulares, con un elemento unidad conteniendo simetrías que le permiten su repetición en varias direcciones (Figura 2).

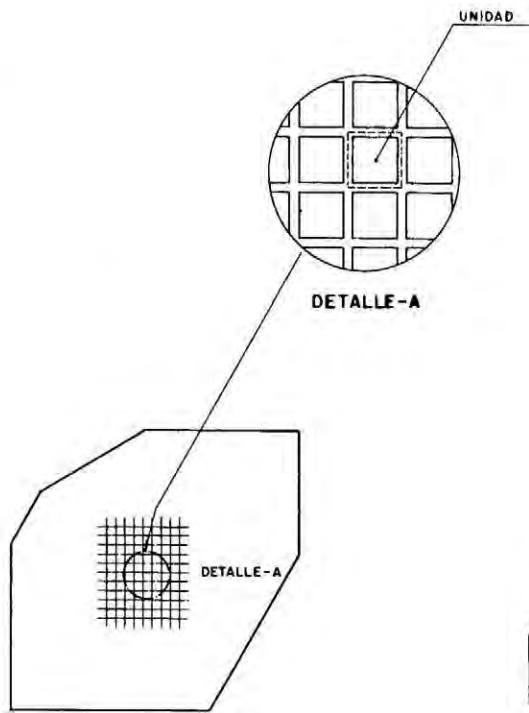


Figura 1. Emparrillado plano.

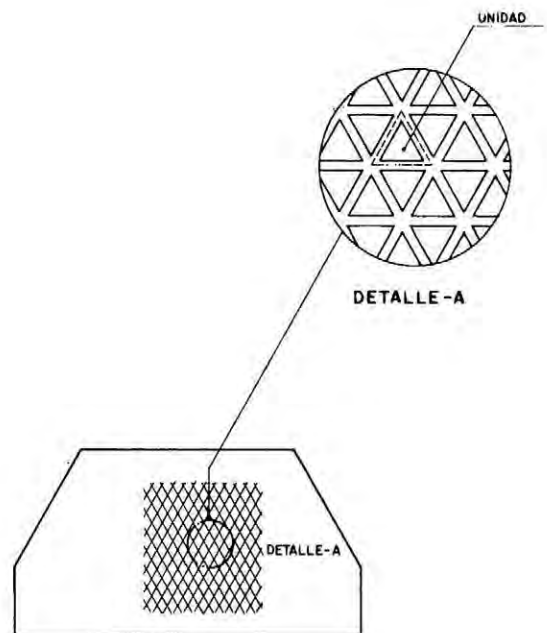


Figura 2. Celosía plana.

El cálculo de estas estructuras puede simplificarse de un modo considerable, si se supone que el número de elementos unitarios existente es suficientemente elevado, para considerar que toda la estructura puede ser sustituida por otra con un material continuo, que presenta unas características determinadas por las propiedades elásticas y geométricas de la celda unitaria.

La determinación de esta estructura con material continuo o estructura homogeneizada puede efectuarse mediante procedimientos empíricos, como es el caso del método de la losa ortótropa equivalente a un tablero de puente de vigas. Es posible, sin embargo, utilizar un procedimiento general de obtención de la estructura límite homogeneizada y que se describe en la siguiente sección.

Finalmente existen situaciones, en las que la periodicidad espacial no ocurre en el interior de la estructura sino en sus condiciones de contorno. La situación límite u homogeneizada consiste en la estructura bajo unas condiciones de frontera uniformes. Un ejemplo, que se desarrollará con detalle aquí, corresponde a un sólido elástico cilíndrico con condiciones de contorno, a lo largo de su superficie lateral, alternativamente tipo Dirichlet, es decir, con movimientos especificados y de tipo Neumann con tensiones conocidas. Este caso corresponde a una simulación tentativa del comportamiento de una barra corrugada en el interior de una masa de hormigón.

## HOMOGENEIZACION. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La homogeneización es un proceso de inspiración física que consiste en substituir un material fuertemente heterogéneo por uno homogéneo equivalente. Este proceso es importante cuando se intenta, por ejemplo, estudiar deformaciones o temperaturas en cuerpos con heterogeneidades debidas a la presencia de impurezas distribuidas de una cierta manera en los mismos, fluidos que atraviesan medios porosos, paredes perforadas, etc.. Desde un punto de vista numérico es necesario realizar algún tipo de promedio para el estudio de estos problemas, pues sino, los métodos numéricos usuales pueden resultar muy costosos dada la compleja estructura geométrica del problema.

De manera general, las técnicas de homogeneización son todas aquellas que permiten substituir un medio heterogéneo por uno homogéneo equivalente. Aunque los procesos de homogeneización han sido estudiados por numerosos autores, sin embargo, la definición matemática de medio homogéneo equivalente no ha tenido un significado matemático preciso hasta fecha relativamente reciente. Son, quizás, los trabajos de Sanchez-Palencia y Babuska hacia 1970 los que han contribuido a dar una formulación clara de un problema de homogeneización bajo la forma de un problema dependiente de un pequeño parámetro.

A grandes rasgos, se puede decir que si se supone  $u^\varepsilon$  la solución de un problema  $P^\varepsilon$  planteado en una estructura periódica, cuya amplitud depende de un pequeño parámetro  $\varepsilon$  (cf. Figura 3), parece lógico pensar que si  $\varepsilon$  es muy pequeño  $u^\varepsilon$  se va a poder aproximar por una función  $u^0$  (solución del problema homogeneizado) independiente de  $\varepsilon$ . Así si  $u^\varepsilon \rightarrow u^0 (\varepsilon \rightarrow 0)$  en alguna topología, se denominará problema límite o problema homogeneizado al problema  $P^0$  del cual  $u^0$  es solución.

Así pues, los problemas que aparecen al intentar resolver un problema  $P^\varepsilon$  de homogeneización son dos fundamentalmente:

- a) Determinar el posible problema homogeneizado  $P^0$ .
- b) Demostrar la convergencia de las soluciones  $u^\varepsilon$  a  $u^0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en alguna topología.

En términos generales, los distintos métodos utilizados en homogeneización se suelen diferenciar en dos grandes grupos: las técnicas basadas en desarrollos asintóticos, y las técnicas matemáticas de convergencia de operadores. En cuanto a las primeras, tienen la ventaja de ser muy intuitivas y de proporcionar, si es posible, el problema homogeneizado, pero presentan el inconveniente de utilizar razonamientos de tipo

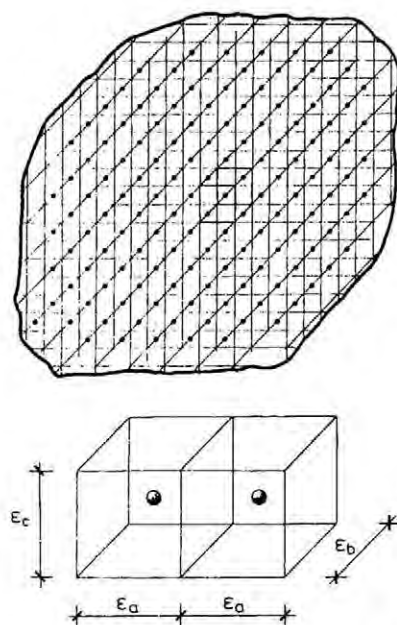


Figura 3. Estructura periódica.

heurístico y que, por tanto, hay que justificar a posteriori. En cuanto a las segundas, aunque son rigurosas y permiten demostrar la convergencia de las soluciones tienen la desventaja de que, en general, necesitan de resultados de las primeras. De alguna manera ambos tipos de técnicas se complementan. En cuanto a autores que han trabajado y contribuido en los últimos años a la introducción de técnicas para la resolución de problemas de homogeneización, se pueden citar entre otros a Benessousan, De Giorgi, Lions, Murat, Sanchez-Palencia, Spagnolo, Tartar, etc. de quienes algunas publicaciones se citan en las Referencias.

En todo proceso de homogeneización se intenta primeramente obtener informaciones macroscópicas en función de informaciones microscópicas. Esta información microscópica, se puede expresar mediante un cambio de variables en un entorno de cada heterogeneidad ("variables locales") que amplían considerablemente el entorno de la heterogeneidad que se está tratando. De esta manera ésta se puede estudiar por separado del resto de las heterogeneidades, dando lugar al denominado problema local, el cual conduce, en ocasiones, a interesantes problemas de la teoría del potencial. Después, se intenta acoplar convenientemente mediante algún "principio de matching", con el resto de las heterogeneidades, para obtener el problema homogeneizado.

Aquí se estudia un problema de homogeneización de fronteras; en este caso las heterogeneidades no aparecen sobre el dominio sino sobre la frontera. A este tipo de problemas pertenecen los problemas sobre fluidos que atraviesan paredes perforadas (cf. Sanchez-Palencia<sup>10</sup>, Sanchez-Palencia & Sanchez-Hubert<sup>9</sup>, por ejemplo); el estudio de las deformaciones en un cuerpo elástico homogéneo una de cuyas paredes presentan rugosidades y se encuentra adherido por estas zonas a una pared lisa (cf. Lobo & Pérez<sup>8</sup>); el estudio de la temperatura en una columna que tiene pequeñas zonas heladas

toroidales a su alrededor (cf. Brillard & Pérez<sup>2</sup>). En estos problemas se estudia el tamaño que deben tener las heterogeneidades sobre la frontera, "talla crítica", de modo que el material se comporte de manera distinta a los casos extremos: todo una heterogeneidad o sin heterogeneidades.

En este artículo se muestran unos ejemplos numéricos de aproximación de un problema de homogeneización de fronteras a través del problema homogeneizado. Aunque un estudio detallado de la obtención del problema límite a través de las técnicas del análisis asintótico formal, pueden encontrarse en la referencia [3], aquí se presenta un breve resumen de este estudio.

Otros ejemplos de homogeneización, cuando el tamaño de las heterogeneidades es del mismo orden que la distancia entre ellas, pueden verse, por ejemplo, en las referencias [1] y [5].

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. DESCRIPCION DEL PROBLEMA HOMOGENEIZADO

### Planteamiento del problema $P^\varepsilon$ .

En el marco de la elasticidad lineal, se considera un cuerpo isótropo, homogéneo, de forma cilíndrica,  $\Omega$ , sometido a la acción de una fuerza  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$ , sobre cuya superficie lateral  $\Sigma$  se suponen existen condiciones de tipo Neumann  $\sigma_{ij}n_j = 0$ , salvo en determinados anillos  $A_k^\varepsilon$ , de anchura  $\varepsilon$ , separados entre sí distancias  $\eta = \eta(\varepsilon)$  (cf. Figura 4),  $k = 1, 2, 3 \dots N$ , con  $N = N(\varepsilon) = O(1/\eta)$ . Se estudia el problema límite para las distintas dependencias  $\varepsilon$  y  $\eta$ ;  $\varepsilon < \eta$ ;  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ .

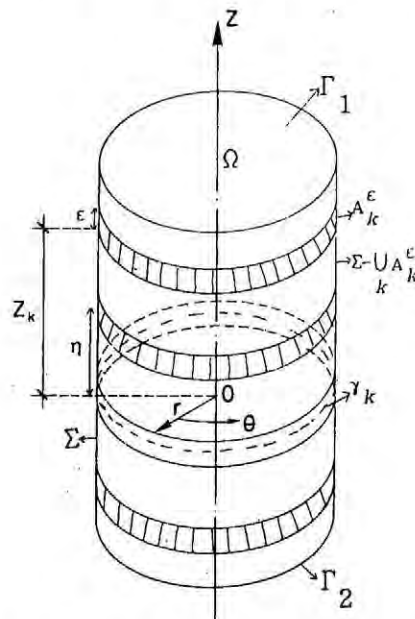


Figura 4. Problemas de homogeneización de fronteras.

Las ecuaciones que rigen este problema son:

$$P^\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\varepsilon + f_i = 0 \text{ en } \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = 0 \text{ sobre } \Gamma_2 U(\Sigma - U A_k^\varepsilon) \\ \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 U U A_k^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}^\varepsilon), e_{kh}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \\ \text{siendo} \\ \mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \text{ vector desplazamiento} \\ a_{ijkh} \text{ las constantes de la elasticidad.} \end{array} \right.$$

Se observa que el problema planteado admite una formulación variacional equivalente a encontrar  $\mathbf{u}^\varepsilon$  en el espacio  $V^\varepsilon$  tal que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{ij}(\mathbf{v}^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f_i v_i^\varepsilon dx \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V^\varepsilon \quad (1)$$

siendo

$$V^\varepsilon = [\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3 / u|_{\Gamma_1} U(U A_k^\varepsilon) = 0]$$

$\mathbf{u}^\varepsilon$  es la solución débil del problema  $P^\varepsilon$ .

Dada la estructura geométrica del problema es evidente que sobre  $\Sigma$  tiene lugar un fenómeno de capa límite. Se considera en primer lugar, que  $\mathbf{u}^\varepsilon$  presenta sobre cada anillo  $A_k^\varepsilon$ , un fenómeno de capa límite,  $k = 1, 2, \dots, 0(1/\eta)$ .

Se postula que  $\mathbf{u}^\varepsilon$  admite un desarrollo exterior, en el interior de  $\Omega$  del tipo:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}^0(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x_1, x_2, x_3) + \dots \quad (2)$$

donde  $\mathbf{u}^0$  será solución del problema  $P^0$ :

$$P^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{ij}^0 + f_i = 0 \text{ en } \Omega, \quad i = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij}^0 n_j = 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \quad \mathbf{u}^0 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \\ + \text{ condiciones de contorno sobre } \Sigma \\ \sigma_{ij}^0 = a_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}^0) \end{array} \right.$$

Con el fin de determinar la condición que  $\mathbf{u}^0$  verifica sobre  $\Sigma$  se procede a utilizar las técnicas del análisis asintótico formal (véase, por ejemplo, las referencias [3], [6], [7]).



### Fenómeno de capa límite sobre cada $A_k^\varepsilon$ , $k$ fijo

Dada la estructura geométrica del problema parece lógico pensar en elegir coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ , y unas coordenadas locales adecuadas en un entorno de  $A_k^\varepsilon$ :

$$R_1 = \frac{r-1}{\varepsilon}, \quad Z_1 = \frac{z-z_k}{\varepsilon}, \quad \theta = \theta \quad (3)$$

$$R_1 \in (-\frac{1}{\varepsilon}, 0), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad Z_1 \in (-\frac{\eta}{\varepsilon}, \frac{\eta}{\varepsilon})$$

Es por tanto razonable considerar el problema de la elasticidad escrito en coordenadas cilíndricas y el vector desplazamiento se expresa ahora en las nuevas componentes  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_r^\varepsilon, u_\theta^\varepsilon, u_z^\varepsilon)$ . De esta manera se supone un desarrollo local para  $\mathbf{u}^\varepsilon$  en un entorno de  $A_k^\varepsilon$  del tipo:

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \alpha^0(\varepsilon)\mathbf{v}^0(R_1, \theta, Z_1) + \alpha^1(\varepsilon)\mathbf{v}^1(R_1, \theta, Z_1) + \dots \quad (4)$$

Razonamientos de tipo standard en análisis asintótico formal conducen a encontrar  $\mathbf{v}^0$  como solución de un problema en un dominio no acotado, para el que hay que introducir una condición adicional en el infinito. En este problema, que no es de elasticidad lineal, se puede obtener su solución a partir de las soluciones de tres problemas locales bidimensionales (en coordenadas  $R_1$ ,  $Z_1$ ), que sí corresponden a la elasticidad lineal y que se plantean en el semiplano ( $R_1 < 0$ ).

La condición en el infinito, a la que se ha hecho referencia se calcula al imponer el acoplamiento ("matching") asintótico entre los desarrollos exterior y local de  $\mathbf{u}^\varepsilon$  en un entorno de  $A^\varepsilon$ . Se obtiene así la siguiente expresión:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \alpha^0(\varepsilon)\mathbf{v}^0\left(\frac{r-1}{\varepsilon}, \theta, \frac{z-z_k}{\varepsilon}\right) \right] = \mathbf{u}^0(1, \theta, z_k) \quad (5)$$

Consideraciones sobre la teoría del potencial, en elasticidad bidimensional, en el semiplano (véase el capítulo 19 de [11]), permiten obtener explícitamente las soluciones de los tres problemas locales, vía ecuaciones integrales. La condición que verifican estas funciones en el infinito conducen a la deducción del valor de  $\alpha^0(\varepsilon)$  siguiente:

$$\alpha^0(\varepsilon) = \frac{-\ln 2}{\ln \varepsilon} \quad (6)$$

### Determinación de la condición sobre $\Sigma$

Se consideran distintos desarrollos, para las tensiones  $(\tau_{rr}^\varepsilon, \tau_{r\theta}^\varepsilon, \tau_{rz}^\varepsilon) = (\tau_{rr}(\mathbf{u}^\varepsilon), \tau_{r\theta}(\mathbf{u}^\varepsilon), \tau_{rz}(\mathbf{u}^\varepsilon))$ , uno exterior en  $\Omega$  y otro local sobre  $\Sigma$ , para lo cual hay que tener en cuenta la información obtenida sobre  $\alpha^0(\varepsilon)$  y  $\mathbf{v}^0$  y hacer un proceso de suma sobre las distintas zonas de capas límites locales  $A_k^\varepsilon$   $k = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ . La hipótesis de solapamiento ("overlap") entre ambos desarrollos (Véase [3] y [6]) conduce a la condición que  $\mathbf{u}^0$  verifica sobre  $\Sigma$ .

En este proceso de suma se determina la llamada "talla crítica" para la relación  $c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\eta \ln \epsilon}$ , con  $c > 0$ ; y finalmente se deduce así el problema  $P^0$  del que es solución  $\mathbf{u}^0$ , donde la condición sobre  $\Sigma$  está dada por:

$$\sigma_{ij}^0 n_j + c C_{ij} u_j^0 = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (7)$$

$\mathbf{C} = C_{ij}$  es la "matriz de capacidades":  $\mathbf{C} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,

$\mathbf{T}$  es la matriz de rotación que transforma los ejes locales del plano tangente al contorno en los generales del problema,

y  $\mathbf{A}$  es la matriz que se calcula a partir de la solución de los tres problemas locales:

$$\mathbf{A} = \pi \mu \begin{bmatrix} \frac{4}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\alpha+1} \end{bmatrix}$$

con  $\alpha = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  constantes de Lamé, de manera que el problema homogeneizado al que se ha llegado está definido por:

$$P^0 \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^0 + f_i = 0 & \text{en } \Omega, i = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij}^0 n_j = 0 & \text{sobre } \Gamma_2, \mathbf{u}^0 = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \sigma_{ij}^0 n_j + c C_{ij} u_j^0 = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \sigma_{ij}^0 = a_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}^0) \end{cases}$$

El caso  $c = +\infty$  se traduce por  $\mathbf{u}^0 = 0$  sobre  $\Sigma$ , es decir, cuando la distancia entre anillos,  $\eta$ , es asintóticamente más pequeña que  $-1/\ln \epsilon$ , el desplazamiento nulo se impone asintóticamente sobre la superficie lateral  $\Sigma$  del cilindro.

El caso  $c = 0$  se traduce por  $\sigma_{ij}^0 n_j = 0$  sobre  $\Sigma$ , es decir, cuando la distancia entre anillos es asintóticamente mayor que  $-1/\ln \epsilon$ , la condición de tensiones nulas sobre  $\Sigma$  se impone asintóticamente.

En el caso  $0 < c < \infty$ , la solución  $\mathbf{u}^\epsilon$  tiene un comportamiento asintótico sobre la superficie lateral  $\Sigma$ , intermedio entre los casos extremos,  $c = 0$  ó  $c = \infty$ , como se observa en la definición del problema límite  $P^0$ .

En cualquiera de los tres casos el problema  $P^0$  es un problema bien propuesto, en un determinado espacio funcional, dado que la matriz  $\mathbf{C}$  es una matriz simétrica definida positiva.

Observación: Estas técnicas permiten también obtener el mismo problema límite si, en vez de anillos circulares sobre la frontera del cuerpo, se considera una banda espiral enrollada a la columna (cf. Figura 5). Otros métodos para el estudio de problemas de este tipo pueden encontrarse en [2].

## COMPROBACION EXPERIMENTAL

Los anteriores resultados teóricos han sido contrastados mediante una experimentación numérica, aplicada al modelo estructural representado por la Figura 6. Corresponde este modelo a un sólido cilíndrico de radio  $R = 0,5$  m y altura  $H = 1,00$  m, compuesto de un material elástico de constantes  $G = 0,5 \text{ tm}^{-2}$  y  $\nu = 0,20$



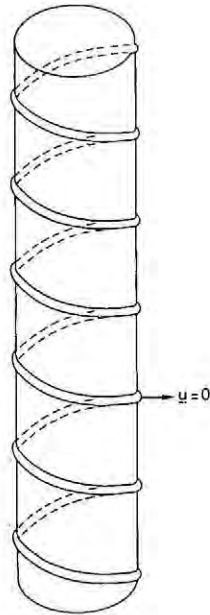


Figura 5. Problema de homogeneización de fronteras.

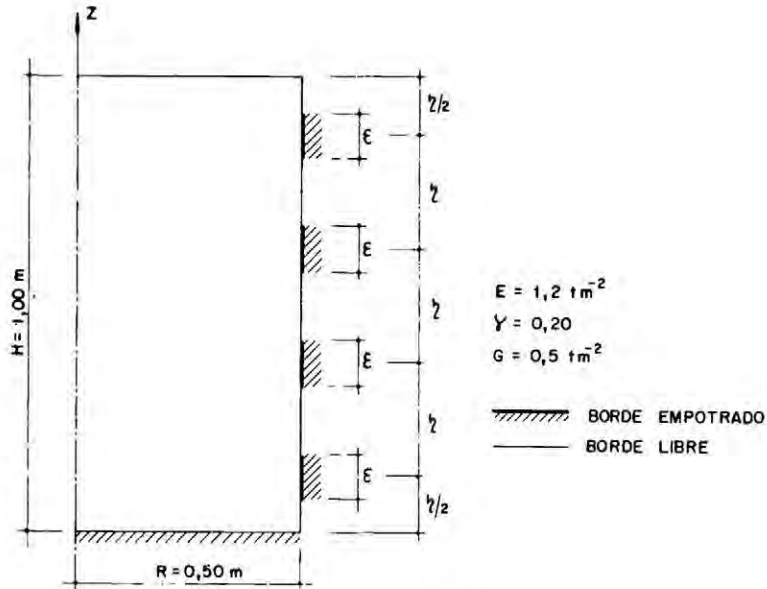


Figura 6. Ejemplo módulo.

Las condiciones de frontera en las secciones rectas  $z = 0$  y  $z = H$  son respectivamente de empotramiento (movimientos  $u_r = u_z = u_\theta = 0$ ) y libre (tensiones  $\sigma_{zz} = \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0$ ). La superficie lateral es libre, pero se dispone de forma periódica, empotramiento a una altura  $\varepsilon H$  separados entre sí una distancia  $\eta H$ .

Los resultados que se obtienen para el problema límite son independientes de la

carga. En este experimento numérico se ha supuesto de hipótesis de carga con simetría de revolución, con objeto de simplificar el cálculo:

Hipótesis 1: Distribución de fuerzas másicas verticales  $f_z = -1tm^{-3}$ .

Hipótesis 2: Distribución de fuerzas másicas radiales  $f_r = -1tm^{-3}$ .

En cada hipótesis se estudian dos casos de la secuencia de problemas definidos por los valores  $\varepsilon$  y  $\eta$ , que determinan las condiciones en el borde lateral del cilindro, tales que  $c = \frac{1}{\eta \ln \varepsilon} = \text{constante}$ .

Se ha supuesto el valor de la constante de la talla crítica  $c = 2.0$  y los dos casos considerados son:

$$\text{Caso 1: } \varepsilon = 0.10 \quad \eta = 0.217 \quad c = \frac{1}{\eta \ln \varepsilon} = 2$$

$$\text{Caso 2: } \varepsilon = 0.01 \quad \eta = 0.109 \quad c = \frac{1}{\eta \ln \varepsilon} = 2$$

El caso límite corresponde, de acuerdo con la sección anterior, a las condiciones de tipo muelle elástico a lo largo del contorno lateral. Las constantes del muelle se definen por la matriz:

$$\mathbf{A} = \pi\mu \begin{bmatrix} \frac{4}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\alpha+1} \end{bmatrix} ; \lambda = \frac{E}{1-2\nu} = 2 ; \mu = G = 0.5$$

es decir:

$$\alpha = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 1.4$$

con lo que resulta:  $c\mathbf{C} = \text{diag}(5,236; 3,1416; 5,236)$

Los modelos en elementos finitos constituidos por anillos rectangulares, con distribuciones lineales para los movimientos, han sido para cada uno de casos anteriores:

Caso 1 (Figura 7)

Número de nudos: 209

Número de elementos: 180 (10 en dirección radial  $r$  y 18 según la altura  $z$ )

Caso 2 (Figura 8)

Número de nudos: 5202

Número de elementos: 5050 (50 en dirección radial  $r$  y 101 según la altura  $z$ )

Caso 3 (Figura 9)

Número de nudos: 5151

Número de elementos: 5000 (50 en dirección radial  $r$  y 100 según la altura  $z$ )

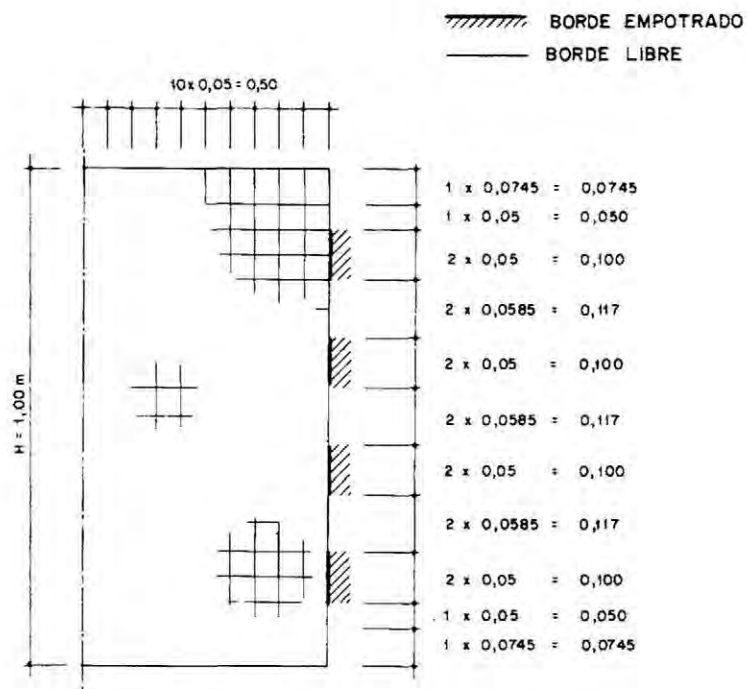


Figura 7. Caso 1. Malla de elementos finitos.

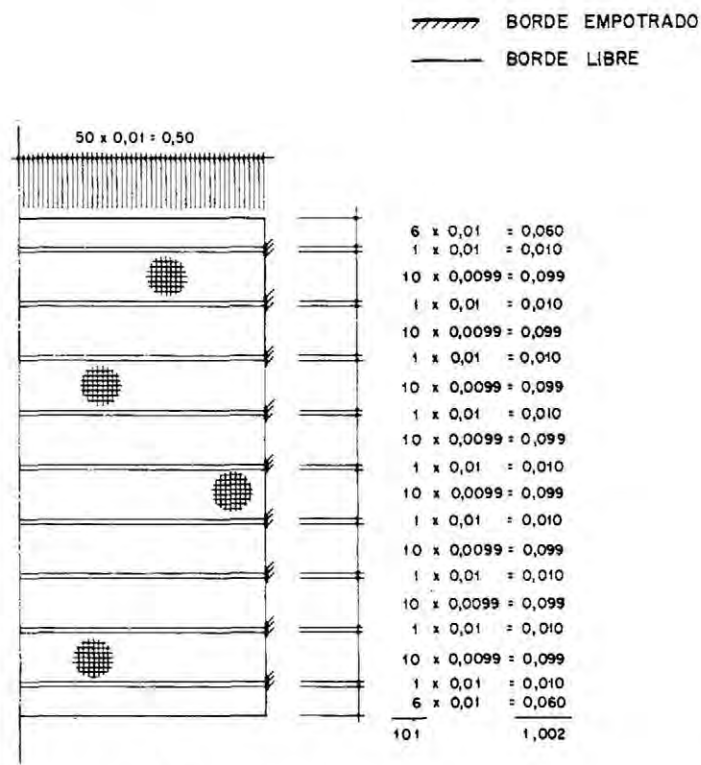


Figura 8. Caso 2. Malla de elementos finitos.

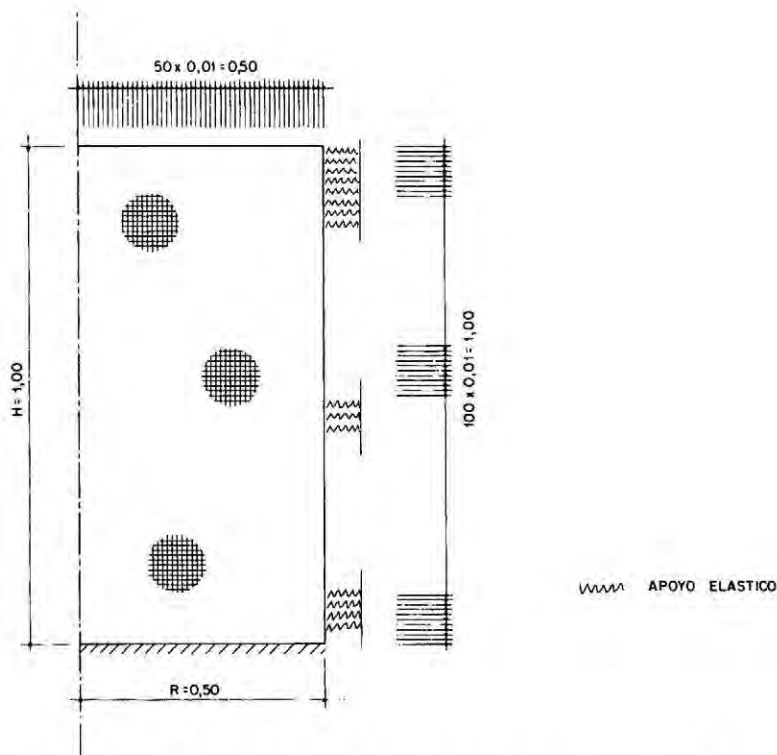


Figura 9. Caso 3. (Caso límite). Malla de elementos finitos.

La discretización del caso 1, es suficiente para alcanzar la aproximación adecuada a la solución exacta, ya que el sólido elástico es muy regular. Para el otro caso se adoptó una malla en elementos finitos más tupida, por razones geométricas, puesto que las condiciones de borde estaban muy discretizadas. Los resultados para la situación límite se obtuvieron para la malla más densa, si bien, para la aproximación requerida bastaba utilizar la malla del caso 1. Por consiguiente se pueden considerar los resultados obtenidos como exactos, para el estudio de la velocidad de convergencia del proceso de homogeneización descrito.

Algunos resultados calculados en cada uno de los tres casos anteriores se muestran en las Tablas I, II y III, representándose los de la hipótesis 1 en las Figuras 10 y 11.

## CONCLUSIONES

Se ha descrito un problema de homogeneización en el dominio, comprobándose el valor de la talla crítica. Este valor ha sido contrastado con una experimentación numérica, observándose la rápida convergencia de los resultados de los casos periódicos intermedios a la solución límite. La teoría expuesta permite en una primera aproximación comprobar, para unas dimensiones dadas del resalto, la eficiencia del corrugado de las barras de acero en hormigón armado a efectos de su resistencia al deslizamiento. En efecto, a partir de las dimensiones de la barra corrugada se puede

Hipótesis 1- carga vertical $f_z = -1.00 \text{ tm}^{-3}$								
Movimientos $u_z$ a lo largo del eje $r = 0$								
Caso 1			Caso 2			Caso 3		
Nudo	$z$	$u_z$	Nudo	$z$	$u_z$	Nudo	$z$	$u_z$
199	1,000	-0,151	5152	1,000	-0,157	5150	1,000	-0,57
188	0,926	-0,154	4999	0,970	-0,158	4948	0,970	-0,59
177	0,876	-0,153	4846	0,940	-0,159	4795	0,940	-0,59
166	0,826	-0,150	4693	0,931	-0,158	4642	0,910	-0,59
155	0,776	-0,146	4540	0,881	-0,158	4489	0,880	-0,58
144	0,717	-0,140	4387	0,852	-0,157	4336	0,850	-0,57
133	0,659	-0,134	4234	0,822	-0,155	4183	0,820	-0,55
122	0,609	-0,128	4081	0,792	-0,152	4030	0,790	-0,52
111	0,559	-0,121	3928	0,763	-0,150	3877	0,760	-0,50
100	0,500	-0,113	3775	0,733	-0,147	3724	0,730	-0,47
89	0,442	-0,104	3622	0,703	-0,144	3571	0,700	-0,44
78	0,392	-0,097	3469	0,673	-0,140	3418	0,670	-0,40
67	0,342	-0,088	3316	0,654	-0,137	3265	0,640	-0,37
56	0,283	-0,076	3163	0,624	-0,133	3112	0,610	-0,33
45	0,224	-0,063	3010	0,584	-0,129	2959	0,580	-0,30
34	0,174	-0,051	2857	0,554	-0,125	2806	0,550	-0,26
23	0,124	-0,038	2714	0,525	-0,121	2653	0,520	-0,22
12	0,074	-0,021	2551	0,495	-0,117	2500	0,490	-0,17
1	0	-0,000	2398	0,465	-0,113	2347	0,460	-0,13
			2245	0,436	-0,108	2154	0,430	-0,08
			2092	0,406	-0,103	2041	0,400	-0,03
			1939	0,376	-0,098	1888	0,370	-0,98
			1786	0,346	-0,092	1735	0,340	-0,92
			1633	0,317	-0,086	1582	0,310	-0,86
			1480	0,287	-0,080	1429	0,280	-0,78
			1327	0,257	-0,074	1276	0,250	-0,73
			1174	0,227	-0,067	1123	0,220	-0,65
			970	0,188	-0,057	919	0,180	-0,55
			817	0,158	-0,049	766	0,150	-0,47
			664	0,128	-0,040	613	0,120	-0,38
			460	0,089	-0,028	460	0,090	-0,29
			307	0,059	-0,019	307	0,060	-0,20
			154	0,050	-0,010	154	0,030	-0,10
			1	0,000	0	0	0	

Tabla I.

Hipótesis 1- carga vertical $f_z = -1.00 \text{ tm}^{-3}$								
Tensiones $\sigma_z$ a lo largo del eje $r = 0$								
Caso 1			Caso 2			Caso 3		
Elemento	$z$	$\sigma_z$	Elemento	$z$	$\sigma_z$	Elemento	$z$	$\sigma_z$
171	1,000	-0,029	5001	1,000	-0,005	4951	1,000	-0,005
161	0,926	-0,077	4851	0,970	-0,032	4851	0,970	-0,024
151	0,876	-0,107	4701	0,940	-0,055	4701	0,940	-0,048
141	0,826	-0,125	4551	0,931	-0,075	4551	0,910	-0,069
131	0,776	-0,135	4401	0,881	-0,091	4401	0,880	-0,085
121	0,717	-0,148	4251	0,852	-0,105	4251	0,850	-0,099
111	0,659	-0,154	4101	0,822	-0,115	4101	0,820	-0,110
101	0,609	-0,160	3951	0,792	-0,123	3951	0,790	-0,118
91	0,559	-0,168	3801	0,763	-0,130	3801	0,760	-0,124
81	0,500	-0,180	3651	0,733	-0,135	3651	0,730	-0,130
71	0,442	-0,196	3501	0,703	-0,140	3501	0,700	-0,134
61	0,392	-0,214	3351	0,673	-0,144	3351	0,670	-0,138
51	0,342	-0,239	3201	0,654	-0,147	3201	0,640	-0,142
41	0,283	-0,270	3051	0,624	-0,152	3051	0,610	-0,147
31	0,224	-0,303	2901	0,584	-0,157	2901	0,580	-0,152
21	0,174	-0,336	2751	0,554	-0,162	2751	0,550	-0,158
11	0,124	-0,372	2601	0,525	-0,169	2601	0,520	-0,165
1	0,074	-0,413	2451	0,495	-0,176	2451	0,490	-0,173
0			2301	0,465	-0,185	2301	0,460	-0,183
			2151	0,436	-0,195	2151	0,430	-0,193
			2001	0,406	-0,207	2001	0,400	-0,205
			1851	0,376	-0,219	1851	0,370	-0,218
			1701	0,346	-0,233	1701	0,340	-0,233
			1551	0,317	-0,248	1551	0,310	-0,249
			1401	0,287	-0,265	1401	0,280	-0,265
			1251	0,257	-0,282	1251	0,250	-0,283
			1101	0,227	-0,300	1101	0,220	-0,302
			951	0,188	-0,319	901	0,180	-0,328
			801	0,158	-0,339	751	0,150	-0,348
			651	0,128	-0,359	601	0,120	-0,368
			451	0,089	-0,386	451	0,090	-0,389
			301	0,059	-0,406	301	0,060	-0,409
			151	0,050	-0,425	151	0,030	-0,428
			1	0,000	-0,444	1	0	-0,447

Tabla II.



Hipótesis 2- carga radial $f_r = -1.00 \text{ tm}^{-3}$								
Movimientos $u_z \times 10^2$ a lo largo de $r = 0$								
Caso 1			Caso 2			Caso 3		
Nudo	$z$	$u_z$	Nudo	$z$	$u_z$	Nudo	$z$	$u_z$
199	1,000	-0,142	5152	1,000	-2,072	5101	1,000	-2,231
188	0,926	-0,722	4999	0,970	-1,888	4948	0,970	-2,042
177	0,876	-0,394	4846	0,940	-1,701	4795	0,940	-1,853
166	0,826	-0,178	4693	0,931	-1,522	4642	0,910	-1,671
155	0,776	-0,021	4540	0,881	-1,354	4489	0,880	-1,499
144	0,717	+0,102	4387	0,852	-1,197	4336	0,850	-1,338
133	0,659	+0,176	4234	0,822	-1,052	4183	0,820	-1,189
122	0,609	+0,216	4081	0,792	-0,920	4030	0,790	-1,050
111	0,559	+0,245	3928	0,763	-0,799	3877	0,760	-0,923
100	0,500	+0,275	3775	0,733	-0,689	3724	0,730	-0,805
89	0,442	+0,310	3622	0,703	-0,588	3571	0,700	-0,696
78	0,392	+0,348	3469	0,673	-0,496	3418	0,670	-0,595
67	0,342	+0,394	3316	0,654	-0,410	3265	0,640	-0,501
56	0,283	+0,457	3163	0,624	-0,331	3112	0,610	-0,413
45	0,224	+0,522	3010	0,584	-0,256	2959	0,580	-0,330
34	0,174	+0,566	2857	0,554	-0,186	2806	0,550	-0,251
23	0,124	+0,573	2714	0,525	-0,118	2653	0,520	-0,174
12	0,074	+0,479	2551	-0,495	-0,052	2500	0,490	-0,100
1	0	0,000	2398	0,465	0,013	2347	0,460	-0,027
			2245	0,436	0,077	2194	0,430	+0,045
			2092	0,406	0,141	2041	0,400	0,117
			1939	0,376	0,205	1888	0,370	0,188
			1786	0,346	0,268	1735	0,340	0,259
			1633	0,317	0,331	1582	0,310	0,328
			1480	0,287	0,343	1429	0,280	0,395
			1327	0,257	0,452	1276	0,250	0,458
			1174	0,227	0,505	1123	0,220	0,515
			970	0,188	0,562	919	0,180	0,573
			817	0,158	0,588	766	0,150	0,596
			664	0,128	0,592	613	0,120	0,594
			460	0,089	0,546	460	0,090	0,555
			307	0,059	0,453	307	0,060	0,463
			154	0,050	0,285	154	0,030	0,294
			1	0,000	0,000	0	0	0

Tabla III.

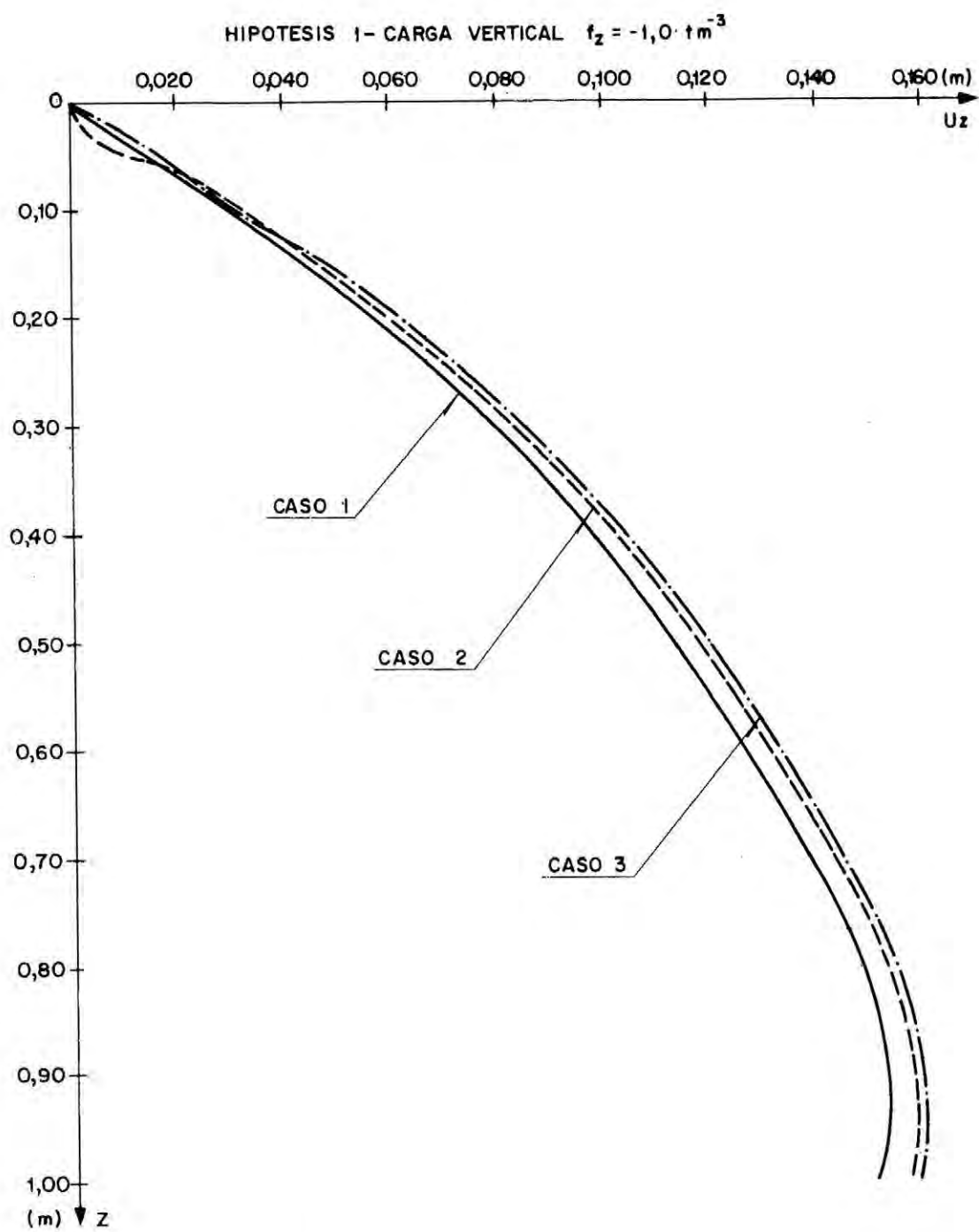


Figura 10. Movimientos verticales.

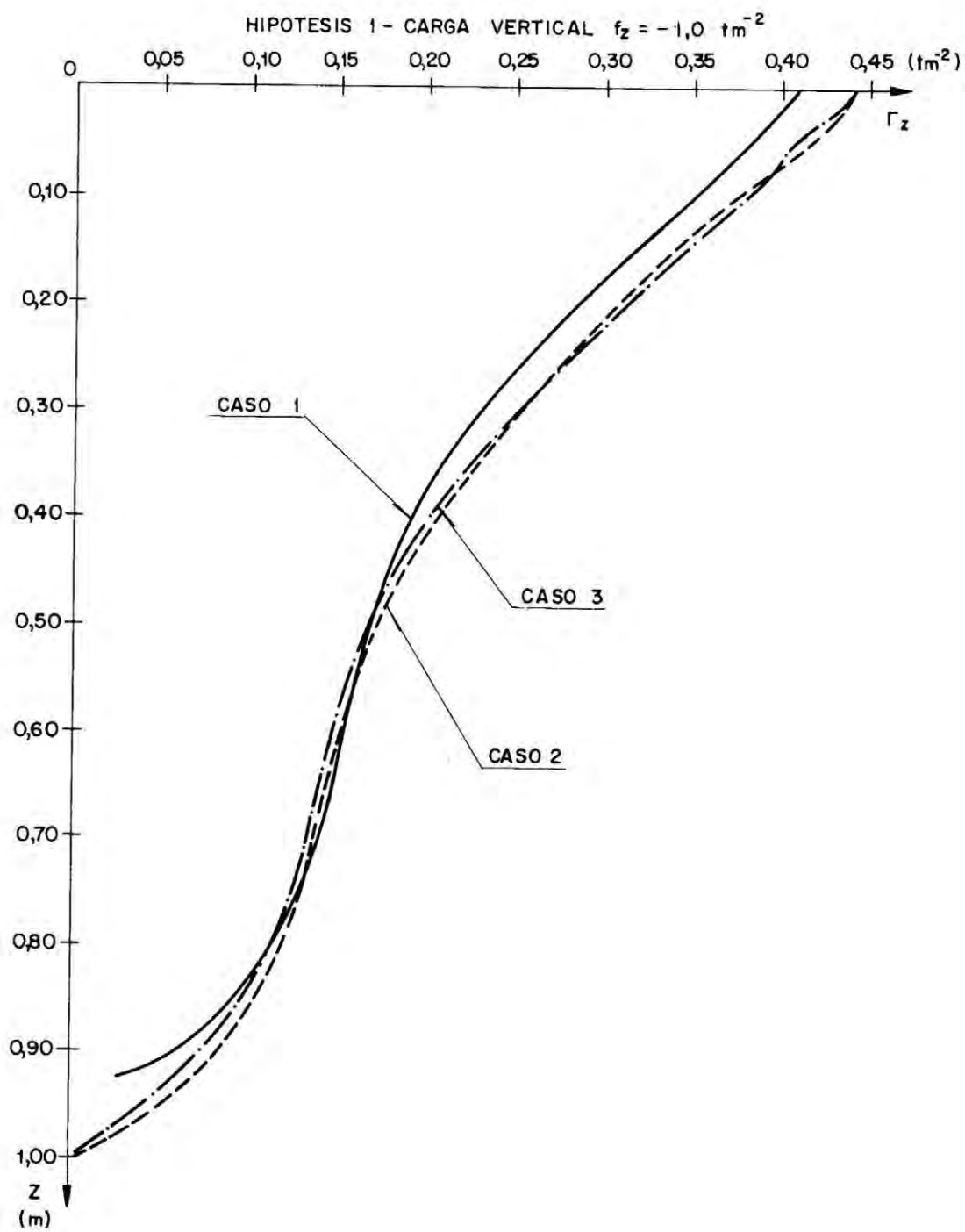


Figura 11. Tensiones verticales.

obtener el valor de la constante  $c$  de la talla crítica y de esta forma evaluar la clase de condiciones de contorno del estado límite homogeneizado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer las sugerencias y comentarios de los censores anónimos de este artículo que han permitido una mejor exposición del mismo.

## REFERENCIAS

1. J.F. Bourgat, "Numerical experiments of the homogeneization method for operator with periodic coefficients", *Rapport de Recherche*, No. 277, INRIA, París, (1978).
2. A. Brillard y E. Pérez, "Comportement asymptotique de un corps homogene isotrope gele sur une partie de sa frontiere", *Universite de Haute Alsace*, No. 47, Mulhouse, (1988).
3. A. Brillard, M. Lobo y E. Pérez, "Une probleme de homogeneisation de frontieres en elasticite lineare pour un corps cylindrique", Aceptado en *C.R.A.S. de París*, (1990).
4. C. Conca, "On the application of the homogeneization theory to a class of problems arising in fluids mechanics, II. Numerical resultats", *Rapport de Recherche*, No. 83031, Lab. Anal. Numer., Université de París VI, (1983).
5. C. Conca y M. Sepulveda, "Resultados numéricos en el problema de la rejilla de Stokes", *Publicaciones del Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación*, Universidad de Chile, (1988).
6. W. Eckhaus, "Asymptotic Analysis of Singular Perturbations", North-Holland, Netherlands, (1979).
7. D. Leguillon y E. Sanchez-Palencia, "Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity", Masson, París, (1987).
8. M. Lobo y E. Pérez, "Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 22, No. 4, pp. 609-624, (1988).
9. J. Sanchez-Hubert y E. Sanchez-Palencia, "Acoustic fluid flow through holes and permeability of perforated walls", *Jour. Math. Anal. Appl.*, Vol. 87, pp. 427-453, (1982).
10. E. Sanchez-Palencia, "Boundary value problems in domains containing perforated walls", *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, College de France Séminar, III*, Research Notes in Mathematics, Vol. 70, pp. 309-325, Pitman, Londres, (1982).
11. N.I. Muskhelishvili, "Some basic problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff, Groningen, (1963).